Задача шаров – близнецов

18.10.2023

М.И.Изотов

izotovmi@mail.ru

izotovmi.ru

Оглавление

Введение

Довелось мне как-то побывать на приеме у весьма квалифицированного врача-дерматолога. Кому потребуется на предмет медицины – дам рабочие координаты по почте. Но интрига в другом: врач оказался большим любителем физики. Чтобы я не мешал ему своим любопытством во время заполнения документации, он задал мне физическую задачу для обдумывания, которую ему когда-то задавали на экзамене.

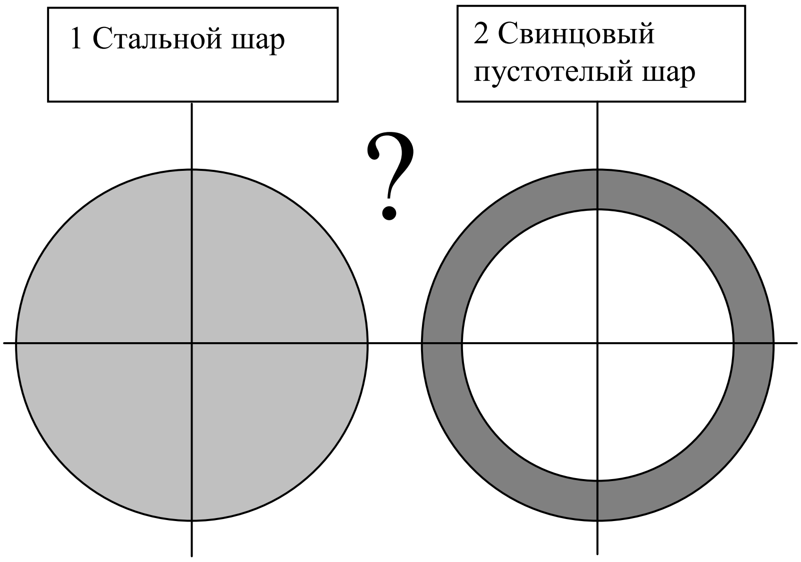
Сама задача, в принципе, несложная, но вот дальнейшее её развитие оказалось очень интересным и показательным с той точки зрения, что в простых вещах, зачастую, кроются сложные отношения и что кажущиеся очевидными решения не всегда являются правильными.

Собственно, для этого статья и писалась – показать, как вроде бы простое очевидное решение на качественном уровне, сделанное по графической модели, оказывается неправильным, когда его проверяешь строгой математикой.

Первичная задача

Формулировка

Есть два шара одинаковой массы и диаметра, визуально неразличимые. Известно, что один из них пустотелый. Понятно, что тогда он должен быть из более плотного вещества, например, первый из стали, второй из свинца. Или из золота или платины - у кого что есть.



Как их различить механическим способом без деформаций, сверлений и прочих разрушений?

Решение

Это классическая качественная задача, решается путем перебора возможных механических свойств, которые могут внешне проявиться при каких-либо условиях. Быстро становится ясно, что, несмотря на внешнюю одинаковость и равенство масс, у шаров будет разный момент инерции, поскольку масса одного из них сосредоточена в оболочке.
Поэтому у него момент инерции будет больше, шар будет труднее раскручиваться. При передаче одинаковой энергии скорость вращения этого шара будет меньше, так как кинетическая энергия вращательного движения описывается как

$E_{кин} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$ Дальше делайте что хотите: пальцами крутите, с наклонной плоскости скатывайте, лишь бы было вращение – будут различия. Скатывание с плоскости, кстати, более объективно и показательно (но есть нюансы). Не буду на этом останавливаться, тут в принципе, все понятно даже без знания точных формул. Но в качестве подтверждения приведем формулы:

для целикового шара $I = \frac{2}{5}mr^2$,

для сферы, когда вся масса сосредоточена в оболочке $I = \frac{2}{3}mr^2$. Промежуточный случай, когда масса располагается ближе к оболочке, но толщина есть $I = \frac{2}{5}m\frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$.

$$I_{свинцового\ пустотелого} > I_{стального\ целикового}$$

Развитие задачи

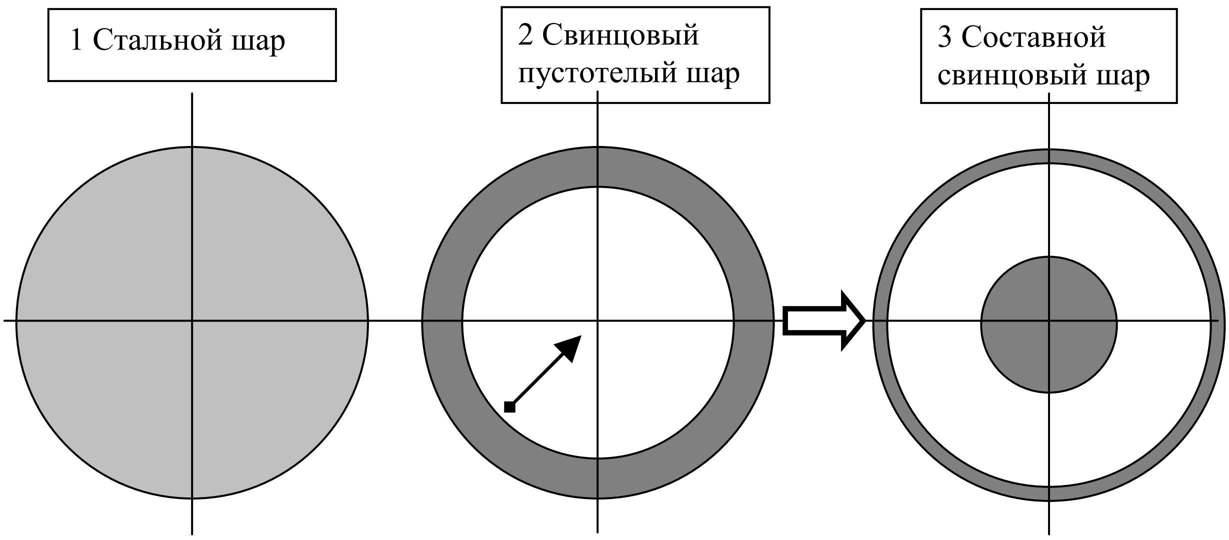
Всегда интересно рассмотреть задачу со всех сторон, поварьировать условия, подумать над тем, что будет, если ….

Вот такого рода размышления привели меня к тому, что существует вариант задачи, когда вышеприведенный способ различения не сработает. Забегая вперед, скажу, что я вообще пока способа не нашел. Возможно, это удастся читателю.

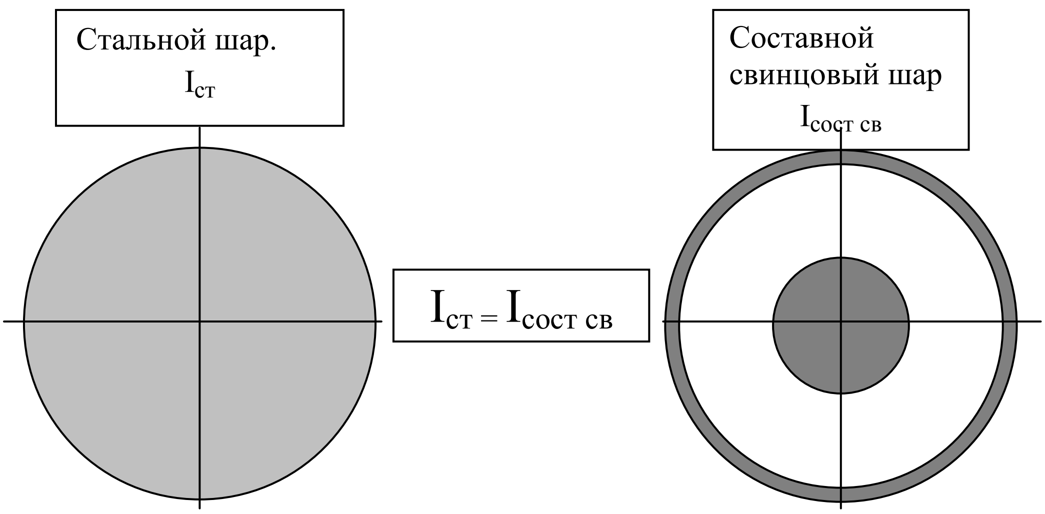
Формулировка

Предположим, в пустотелом шаре завелся какой-нибудь гномик с лопатой и перекидал часть материала оболочки в центр сферы. Максвелл в свое время демона к работе привлек – ну, то Максвелл, а нам гномика хватило.

Получился составной свинцовый шар.



В процессе переброски материала от оболочки к центру будет меняться момент инерции – он будет уменьшаться, потому что часть материала с большого радиуса будет перемещаться на маленький. В какой-то момент времени моменты инерции составного свинцового шара и целикового стального сравняются.



$m_{ст}=m_{сост\ св}$

$V_{ст}=V_{сост\ св}$

$I_{ст}=I_{сост\ св}$

В силу аддитивности момента инерции

$I_{сост\ св}=I_{оболочки}+I_{внутр\ шара}$

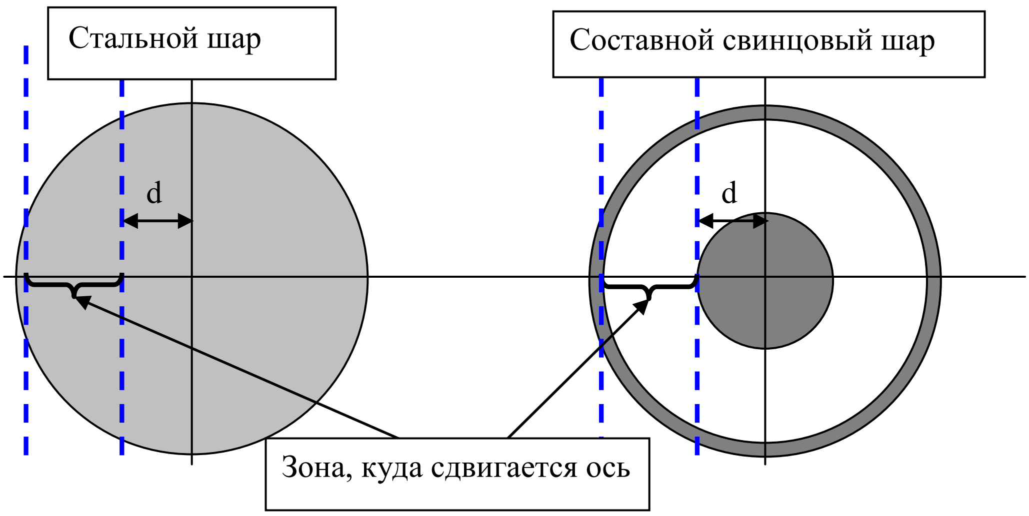
Есть ли механический метод различения этих шаров? Не деформируя и не разрушая.

Решение

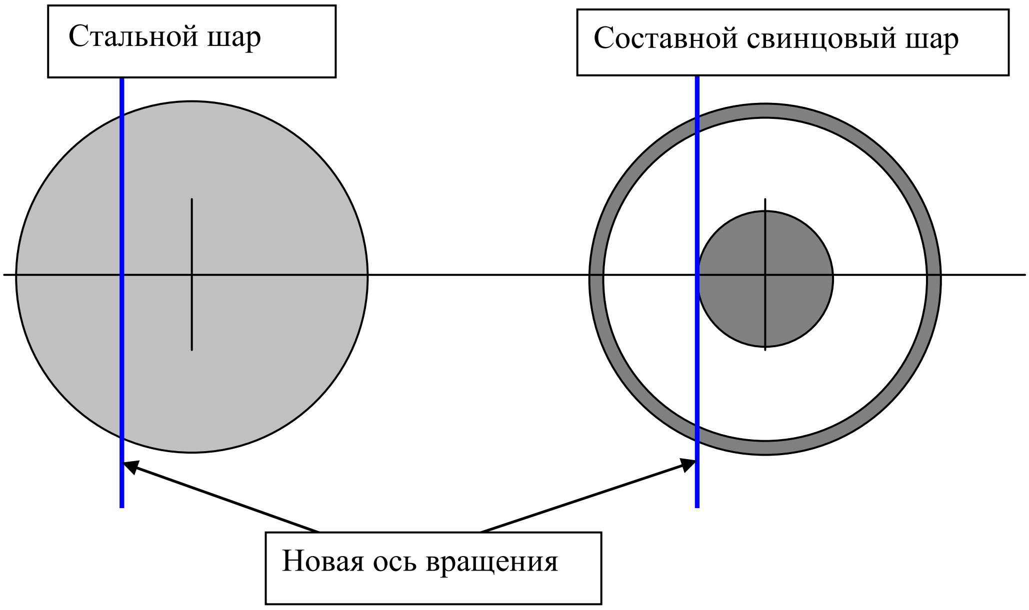
Решение будет двухэтапное, такое, какое было в действительности. Сначала – качественные рассуждения на основе картинки (которую можно назвать гордым именем «графическая модель»), которые приведут нас к неоднозначному выводу. Потом – проверка математикой, опровержение предыдущей гипотезы и правильное решение.

Рассуждения

Момент инерции может быть определен и проявиться в действии не только относительно центральной оси. В принципе, ось вращения может быть любая. Отсюда – приходит на ум: что, если сдвинуть оси и посмотреть момент относительно нецентральных, а специфически расположенных осей? Очень уж многообещающе выглядит пустота между внутренним шаром и наружной оболочкой, и высокая плотность внутреннего шара.



Смещаем ось вращения (естественно, в обоих шарах) в диапазон промежутка между оболочкой и внутренним шаром.
Для примера, возьмем конкретную ось, проходящую по линии, касательной к внутреннему шару. Но все рассуждения будут применимы и к другим, находящимся в диапазоне промежутка.



Моменты инерции изменятся у обоих шаров, это несомненно, момент инерции всегда меняется с изменением оси, но будут ли эти изменения одинаковыми или разными? Останутся ли измененные моменты инерции равными или будут разниться? И смещением оси мы решим задачу различения этих шаров?

Глядя на картинку, можно сразу увидеть, что как только мы сместили ось, в составном шаре с одной стороны оси появилась существенная масса внутреннего шара из вещества высокой плотности. В целиковом шаре ничего подобного нет. И мы с радостью констатируем, что моменты инерции относительно новой, смещенной оси, вроде бы, будут разными ввиду таких явных различий. То есть задача различения, вроде бы, решилась смещением оси в диапазон пустоты.

И именно к такому выводу я довольно быстро пришел.

Но червячок сомнения оставался, и я решил подкрепить свои, вроде бы логичные соображения, родившиеся на основе графической модели, математикой.

Дальше – что из этого вышло.

Теорема Гюйгенса - Штейнера.

Картинка наглядна, облегчает представление о происходящем. Иногда этого достаточно. Но даже когда кажется, что все из картинки понятно (а в качественных задачах это часто), хочется подкрепить свои мысли математическим описанием.

И поможет нам в этом Теорема Гюйгенса – Штейнера, которую часто называют коротко теоремой Штейнера. Она позволяет рассчитать момент инерции тела относительно любой оси, параллельной оси, проходящей через центр масс тела (центральная ось) при знании расстояния между этими осями и момента инерции относительно центральной оси: $I = I_c + md^2$

Исходим из известных формул расчета момента инерции для шара $\frac{2}{5}mR^2$ и сферы $\frac{2}{3}mR^2$. Считаем внешнюю оболочку составного свинцового шара тонкой. Допущение, конечно, но на принцип не влияет.

Стальной шар - $I_{ст} = \frac{2}{5}m_{ст}R^2$

Составной свинцовый шар - $I_{состСв} = \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2$, где

$I_{ст}$ – *момент инерции стального шара*

$I_{состСв}$ – *момент инерции составного свинцового шара*

r – *радиус внутреннего шара в составе составного свинцового шара*

R – *внешний радиус шаров*

$m_{ст}$ – *масса стального шара*

$m_{цСв}$ – *масса центрального шара в составе составного свинцового*

$m_{оболСв}$ – *масса оболочки в составе составного свинцового шара*

$m_{ст} = m_{цСв} + m_{оболСв}$

По условию, составной свинцовый шар делался из его оболочки так, чтобы его момент инерции был равен моменту инерции целикового стального шара. Их массы были равны изначально, внешние радиусы тоже.

$I_{ст} = I_{состСв}$ в случае центральных осей по условию.

$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 = \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2$ - раскрываем выражения для I обоих шаров в случае центральных осей.

Теперь самое интересное: смещаем оси на расстояние d от центра и расписываем по теореме Штейнера.

Вопрос: будут ли у нас эти выражения разными (не равными) и насколько?

$$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 + m_{cm}d^2 \quad ? \quad \left(\frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + m_{цСв}d^2\right) + \left(\frac{2}{3}m_{оболСв}R^2 + m_{оболСв}d^2\right)$$

раскрываем скобки, группируем, выносим

$$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 + m_{cm}d^2 \quad ? \quad \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2 + m_{цСв}d^2 + m_{оболСв}d^2$$

$$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 + m_{cm}d^2 \quad ? \quad \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2 + \left(m_{цСв} + m_{оболСв}\right)d^2$$

$m_{цСв} + m_{оболСв} = m_{cm}$ *– по начальному условию, откуда*

$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 + m_{cm}d^2 \quad ? \quad \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2 + m_{cm}d^2$ *члены* $m_{cm}d^2$ *взаимно уничтожаются и мы приходим к равным (см. выше) величинам*

$$\frac{2}{5}m_{cm}R^2 = \frac{2}{5}m_{цСв}r^2 + \frac{2}{3}m_{оболСв}R^2$$

$I_{cm} = I_{состСв}$ *Эти величины равны по первоначальному условию. Не важно, какие они, важно, что мы пришли к равенству, то есть в первоначальном уравнении, описывающем моменты инерции при сдвиге оси, мы должны вместо знака вопроса поставить знак равенства*

Вот так. Не зря нас терзали смутные сомнения! **Суждение, составленное по картинке, оказалось неверным.**

Выводы

Предложенный метод различения шаров путем смещения их осей вращения оказался невалидным.

При смещении осей, момент инерции, конечно же, меняется у обоих шаров, но меняется так, что и измененные моменты инерции остаются равными между собой, несмотря на то, что один из шаров составной.

Механический метод различения пока не найден.

Нюансы, комментарии, вопросы

Хорошая задачка получилась. Очень показательная в том плане, что нельзя полагаться на первые впечатления, возникающие при рассмотрении графической модели.

Любая хорошая задача при её детальном рассмотрении ставит много вопросов. И именно в этом её ценность. Решение – что? Решение – пройденный этап, а вот возникшие вопросы – это перспектива, это – жизнь. И неважно, что большинство вопросов останутся без ответа – движение мысли – вот что важно.

Большинство вопросов я только обозначу, какие-то комментарии могут оказаться спорными – это, скорее, некие проблемные мысли вслух, а не систематическое изложение темы.

- Почему мы (я) ориентируясь только на картинку, первоначально впали в заблуждение?

Думаю, что тут дело в чистой психологии восприятия. Внутренний шар – концентрированная масса просто бросается в глаза с одной стороны от оси. И на его фоне наличие пустоты как-то теряется. А ведь пустота за центральным шаром имеет огромное значение, поскольку момент инерции зависит от квадрата расстояния.

- Можно ли при выходе оси за пределы шаров, «сбросить» их массы в центр масс каждого и вести вычисления с такой конфигурацией? Это ведь стандартный прием в физике.

А вот здесь – нельзя, полученные нами соотношения ясно показывают, что важно распределение масс. «Сбросить» всю массу в центр масс можно только при большом удалении оси от этого центра, когда член $\mathbf{mr^2}$ уравнения Штейнера станет определяющим, а тот, который отражает распределение масс в теле - пренебрежимо мал. Когда это произойдет - зависит от требований к точности решения задачи.

- Когда говорят о моменте инерции какого-либо тела, обычно забывают добавить, относительно какой оси.

Дело естественное, поскольку по умолчанию считается, что относительно оси, проходящей через центр масс.

- В связи с этим интересно вспомнить, что помимо центра масс существует центр инерции. А мы говорим как раз об инерции. Почему же тогда через центр масс, а не через центр инерции?

Думаю, что дело в том, что центр инерции ползает в зависимости от условий. Строго говоря, при вращательном движении поле сил инерции неоднородно и эта неоднородность зависит от расположения оси.

- В общем случае центры масс, инерции и тяжести не совпадают.

В сети есть очень хороший материал по поводу различных центров: https://dzen.ru/a/YJqHxavqphX9VZM-?utm_referer=yandex.ru - очень рекомендую.

- Масса считается инвариантом, хотя здесь сразу грозным Эверестом встает вопрос – а какая масса? Гравитационная или инертная (инерционная)?

Мы настолько привыкли к понятию «массы», что этот вопрос кажется странным. В жизни, в быту – да, действительно, немножко странный. А вот со строгой точки зрения совсем не странный, поскольку понятие массы появляется из двух разных законов – достаточно припомнить школьный курс физики, и этот вопрос возникнет.

Один закон – это второй закон Ньютона (инертная (инерционная) масса), второй – закон всемирного тяготения (гравитационная масса).

И не существует никаких доказательств, что это одно и то же.

Есть эксперименты, которые с высокой точностью доказывают, что эти массы пропорциональны друг другу, и не более того. При этом не исключено, что при повышении точности можно будет увидеть нарушение пропорциональности.

- Постулат Эйнштейна об эквивалентности гравитационного поля и поля сил инерции – не более, чем заплатка на теле современной физики, причем с моей (скромной и малозначащей точки зрения, что я отчетливо осознаю), сомнительный, и вот почему:

Гравитационное поле принципиально неоднородно, его напряженность падает как квадрат расстояния. Единственный обратный случай – бесконечно протяженное тело.

Инерционное поле принципиально может быть однородным – например, в случае с поступательным прямолинейным движением.

Получается, что Эйнштейном постулирована эквивалентность полей с принципиально разными свойствами?

Или поступательного прямолинейного движения не существует в принципе? Но в современной физике такое понятие существует и активно используется. Правда, в качестве абстракции может использоваться и бесконечно протяженное тело.

- Ситуация в современной физике, в областях, которые, казалось бы хорошо изучены, сейчас напоминает ситуацию с эпициклами Птолемея, когда все становится все запутаннее и запутаннее. Нужен Коперник, но где ж его взять в современных условиях процветающего безумия?

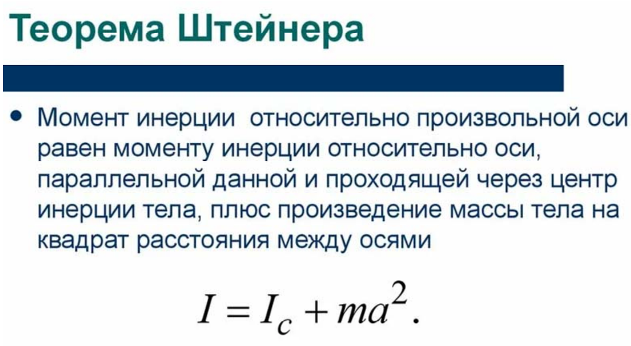
- Теорема Гюйгенса – Штейнера

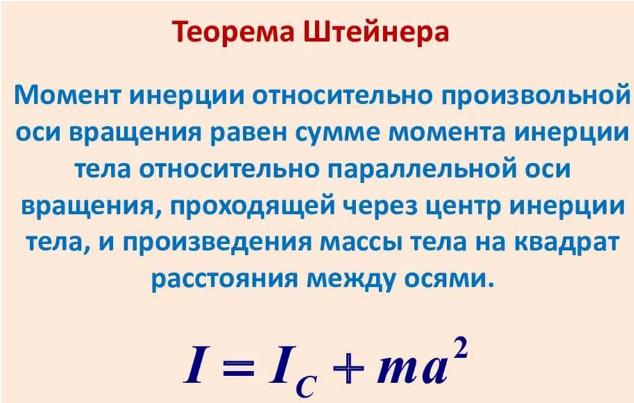
Вывод теоремы Гюйгенса – Штейнера

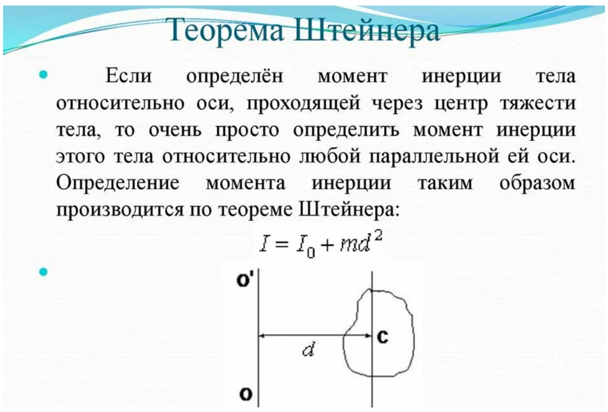
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D1%8E%D0%B9%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81%D0%B0_%E2%80%94_%D0%A8%D1%82%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0

Естественным следствием является возможность рассчитывать моменты инерции относительно любых осей, параллельных заданным, при знании момента инерции относительно одной из осей и их удаления от центральной оси.

Иногда встречаются формулировки Теорема Гюйгенса – Штейнера, в которых используются оси, проходящие через центр инерции и даже через центр тяжести тела!







?

Сомнительные формулировки. Особенно та, что с центром тяжести. При доказательстве теоремы и выводе формулы такие понятия не используется. Это еще раз говорит о том, что все материалы, найденные в Интернете, следует проверять по доверенным источникам.

- Момент импульса тоже не поможет в разрешении задачи различения шаров – он прямо зависит от момента инерции: произведение (векторное) момента инерции на угловую скорость.